バナッハ空間における堅非拡大型写像の不動点の存在について (非線形解析学と凸解析学の研究)

青山, 耕治

数理解析研究所講究録
第1821巻 2013年 55-62

バナッハ空間における堅非拡大型写像の不動点の存在について
Existence of fixed points of firmly nonexpansive-like mappings in Banach spaces

千葉大学・法経学部 青山 耕治 (Koji AOYAMA)
Faculty of Law and Economics
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H06, 47J20, 47J25.
Keywords and phrases. バナッハ空間, 堅非拡大型写像, P 型写像, 不動点, 極大単調作用素, リゾルベント.

1 序論

本稿では, 文献 [2] で得られた結果とその周辺の残された問題を紹介する。文献 [2] では, Hilbert 空間上の堅非拡大写像の Banach 空間への自然な拡張の一つである P 型写像の不動点に関する存在定理を証明している。

文献 [2] に関連する先行研究として Solodov と Svaiter による文献 [18] が重要である。文献 [18] では, 極大単調作用素の零点問題に関する次の定理が証明されている。

定理 1.1 ([18]). H を実 Hilbert 空間, $A\colon H\to 2^H$ を極大単調作用素, $\{r_n\}$ を $\inf_n r_n>0$ となる実数列, x を H の点とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1=x$ および各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} C_n=\{z\in H:\langle z-J_{r_n}x_n, x_n-J_{r_n}x_n\rangle\le 0\};\\ D_n=\{z\in H:\langle z-x_n, x-x_n\rangle\le 0\};\\ x_{n+1}=P_{C_n\cap D_n}(x)\end{cases}$$

で定義する。ここで, $J_{r_n}=(I+r_nA)^{-1}$ であり, $P_{C_n\cap D_n}$ は H から $C_n\cap D_n$ の上への距離射影である。このとき, $\{x_n\}$ は定義できて, さらに $A^{-1}0=\{z\in H:0\in Az\}$ とおくと, 次が成り立つ。

(1) $A^{-1}0\ne\emptyset$ ならば, $\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}(x)$ へ強収束する。
(2) $A^{-1}0=\emptyset$ ならば, $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\infty$ である。

定理 1.1 の結論 (1) は, 極大単調作用素の零点の近似に関する結果であり, 距離射影 $P_{C_n\cap D_N}$ を使って強収束性が得られたところが重要である。これに関連する研究が, 文献

[8,12,14,15] である。このうち, [8,15] では, 結論 (1) の Banach 空間への拡張が行われている。[8] では Banach 空間の一般化射影が, [12,15] では Banach 空間の距離射影が使われている。一方, [14] では定理 1.1 の点列構成方法を非拡大写像の不動点の近似問題へ応用している。

定理 1.1 の結論 (2) は, 極大単調作用素の零点の存在に関する結果と見ることができる。実際, (2) から $\{x_n\}$ が有界な部分列を持つならば, $A^{-1}0 \neq \emptyset$ であることがわかる。これに関連する研究として, 文献 [12,13] がある。[12] では, Banach 空間の極大単調作用素に対して

- 零点の存在の有無にかかわらず, 定理 1.1 と同様に点列 $\{x_n\}$ が定義できること,
- 零点の存在性と点列 $\{x_n\}$ の有界性が同値であること

を示しており, 結論 (2) の部分的拡張が行われている。また [13] では, Hilbert 空間の非拡大写像について同様な結果が得られている。つまり, 文献 [13] は, [14] を補完する結果といえる。

文献 [19] では, Banach 空間の均衡問題*1について [12] と同様な結果が得られている*2が, [22] で導入された新しい点列構成方法*3を使っているところが, [12] と大きく異なる。さらに [3] では, Hilbert 空間上の堅非拡大写像の不動点問題について, [22] の方法による収束定理および存在定理が得られている。

これらの先行研究が動機付けとなり, 堅非拡大型 (P 型) 写像の不動点の存在性と射影法から作られる点列の有界性などの関係をまとめたものが, 今回紹介する文献 [2] である。

2 準備

以下, $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合, E を実 Banach 空間, E^* を E の共役空間とし, E のノルムを $\|\cdot\|$ で, $x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $\langle x, x^* \rangle$ で, E 上の恒等写像を I で, E 上の双対写像を J で表す。また, E の点列 $\{x_n\}$ が x へ強収束することを $x_n \to x$, 弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ と表す。E のノルムの微分可能性および E の凸性の定義, J の諸性質につての詳細は, 文献 [7,20,21] を参照するとよい。

以下, 特に断らない限り, E を滑らか (smooth), 狭義凸 (strictly convex) かつ回帰的

*1 [19] の均衡問題は, 極大単調作用素の零点問題に書き換えられることが知られている [1,5]。

*2 著者には, [19]172 頁 2 行目の $y_n = P_{C_{n+1}}(x_n)$ が成り立つ理由がわからなかったが, これが成り立たなくても次の行の結論は得られる。詳しくは, [2,5] の該当部分を参照して欲しい。

*3 のちに「shrinking projection method」などと呼ばれる。

(reflexive) な Banach 空間とし, C を E の空でない部分集合とする。

C が閉凸のとき, 各 $x \in E$ に対して, $\|x-z\| = \min\{\|x-y\| : y \in C\}$ を満たす $z \in C$ がただ一つ存在する。その点 z を $P_C(x)$ と表し, P_C を E から C の上への距離射影 (metric projection) と呼ぶ。

$A\colon E \to 2^{E^*}$ を極大単調作用素[*4]とするとき, すべての $r>0$ に対して $\left(I+rJ^{-1}A\right)^{-1}$ は一価写像になることが知られている。ここで, J^{-1} は E^* の双対写像である。写像 $\left(I+rJ^{-1}A\right)^{-1}$ は A のリゾルベント (resolvent) と呼ばれ, K_r と表す。リゾルベント K_r は, 単調作用素の零点の近似理論, 例えば近接点法 (proximal point method) において重要な役割を演ずる。詳しくは, [17,21] を参照するとよい。

写像 $S\colon C \to E$ が P 型であるとは, すべての $x,y \in C$ に対して

$$\langle Sx-Sy, J(x-Sx)-J(y-Sy)\rangle \geq 0$$

が成り立つときをいう。E が Hilbert 空間のとき J は恒等写像であるから, P 型写像は Hilbert 空間上の堅非拡大[*5]写像の一般化である。P 型写像については, 次のことが知られている。詳しくは, [4,5] を参照するとよい。

- 閉凸集合 C の上への距離射影 P_C は P 型である。
- すべての $r>0$ に対して, 極大単調作用素 A のリゾルベント K_r は P 型である。
- C が閉凸, $S\colon C \to E$ が P 型ならば, S の不動点の集合 $\{z \in C : z = Sz\}$ は閉凸である。

3 P 型写像に関する存在定理

本節では, 特に断らない限り, E を滑らかで一様凸 (uniformly convex) な Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合, S を C から C への P 型写像とする。また, S の不動点の集合を $F(S)$ で表す。

まず, ハイブリッド射影法 (hybrid projection method) を使った存在定理を述べる。

定理 3.1 ([2, Theorem 3.4]). x を C の点とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に

[*4] 極大単調作用素 (maximal monotone operator) の定義および諸性質については, [6,21] を参照するとよい。

[*5] C を実 Hilbert 空間 H の空でない部分集合とするとき, $V\colon C \to H$ が堅非拡大 (firmly nonexpansive) であるとは, すべての $x,y \in C$ に対して, $\langle Vx-Vy, x-Vx-(y-Vy)\rangle \geq 0$ が成り立つときをいう。

対して

$$\begin{cases} C_n = \{z \in C : \langle z - Sx_n, J(x_n - Sx_n)\rangle \le 0\}; \\ D_n = \{z \in C : \langle z - x_n, J(x - x_n)\rangle \le 0\}; \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x) \end{cases}$$

で定義する*6。このとき, 次の四つは同値である。

- S は不動点をもつ;
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$;
- $\{x_n\}$ は有界である;
- $\{x_n\}$ は強収束する。

この場合, $\{x_n\}$ の極限は $P_{F(S)}(x)$ である。

次に, [22] で導入された shrinking projection method による存在定理を述べる。

定理 3.2. x を C の点とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$, $C_1 = C$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle z - Sx_n, J(x_n - Sx_n)\rangle \le 0\}; \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x) \end{cases}$$

で定義する*7。このとき, 次の四つは同値である。

- S は不動点をもつ;
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$;
- $\{x_n\}$ は有界である;
- $\{x_n\}$ は強収束する。

この場合, $\{x_n\}$ の極限は $P_{F(S)}(x)$ である。

文献 [2] をまとめ始めたころ, 上の定理 3.2 を二つ目の主定理としていた。しかし, 論文をまとめていく過程で, 文献 [9, 10] を知り, [2] には定理 3.2 を少し一般化した次の結果を掲載した。

定理 3.3 ([2, Theorem 3.5]). E を滑らか, 狭義凸, かつ回帰的な Banach 空間とし, E は Kadec–Klee 条件*8を満たすとする。さらに, C, S, x, $\{x_n\}$ は定理 3.2 と同じとする。こ

---

*6 $\{x_n\}$ が well-defined であること, つまり, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $C_n \cap D_n \neq \emptyset$ であることが示せる。

*7 $\{x_n\}$ が well-defined であること, つまり, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $C_n \neq \emptyset$ であることが示せる。

*8 E の任意の点列 $\{y_n\}$ に対して, 「$y_n \rightharpoonup y$, $\|y_n\| \to \|y\| \Rightarrow y_n \to y$」が成り立つとき, E は Kadec–

のとき, 次の三つは同値である。

- S は不動点をもつ;
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$;
- $\{x_n\}$ は強収束する。

この場合, $\{x_n\}$ の極限は $P_{F(S)}(x)$ である。さらに, E を一様凸とすると, 上記の三つは

- $\{x_n\}$ は有界である

と同値である。

4 系および残された問題

ここでは, 前節の定理 3.1 および 3.3 から得られる系および残された問題について説明する。

定理 3.1 から, 次の系が得られる。なお, 系 4.1 の (1) と (3) の同値性は, 文献 [13] ですでに得られていた。

系 4.1. H を実ヒルベルト空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $T\colon C \to C$ を非拡大[*9]写像, x を C の点とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} C_n = \{z \in C : \|z - Tx_n\| \leq \|z - x_n\|\}; \\ D_n = \{z \in C : \langle z - x_n, x - x_n \rangle \leq 0\}; \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x) \end{cases}$$

で定義する。このとき, 次の四つは同値である。

(1) T は不動点をもつ;
(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$;
(3) $\{x_n\}$ は有界である;
(4) $\{x_n\}$ は強収束する。

この場合, $\{x_n\}$ の極限は $P_{F(T)}(x)$ である。

Klee 条件を満たすという。E が一様凸のとき, E は狭義凸かつ回帰的で, さらに Kadec–Klee 条件を満たすことが知られている。詳しくは, [21] を参照するとよい。

*9 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。

証明. $S=(I+T)/2$ とおくと, $S\colon C\to C$ は堅非拡大であり, $F(S)=F(T)$ が成り立つことが容易にわかる。さらに, $\|z-Tx_n\|^2-\|z-x_n\|^2=4\langle z-Sx_n, x_n-Sx_n\rangle$ であるから, すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$C_n=\{z\in C:\langle z-Sx_n, x_n-Sx_n\rangle\le 0\}$$

となる。ゆえに, 定理 3.1 より結論を得る。 □

同様にして, 系 4.1 の仮定のもとで, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1=x$ および各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} C_{n+1}=\{z\in C_n:\|z-Tx_n\|\le\|z-x_n\|\}; \\ x_{n+1}=P_{C_{n+1}}(x) \end{cases}$$

で定義すると, 定理 3.3 より, 系 4.1 と同じ結論が得られる。

最後に, 定理 1.1 の拡張およびその周辺に関して残された問題をまとめておく。

第 1 節で述べた通り, 定理 1.1 の結論 (1) については, Banach 空間への 2 種類の拡張に成功している。一方, 定理 1.1 の結論 (2) については, [12] において部分的な拡張には成功しているが, [12, Theorem 3.2] の仮定のもとで

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|\ne\infty\Rightarrow A^{-1}0\ne\emptyset$$

が成り立つかどうかわかっていない。同様に, 定理 3.1 または 3.3 の仮定のもとで

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|\ne\infty\Rightarrow F(T)\ne\emptyset$$

が成り立つかどうかもわかっていない。このように, 定理 1.1 の拡張およびその周辺には, 未解決問題がいくつか残っている。

参考文献

[1] K. Aoyama, Y. Kimura, and W. Takahashi, *Maximal monotone operators and maximal monotone functions for equilibrium problems*, J. Convex Anal. **15** (2008), 395–409.

[2] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Existence of fixed points of firmly nonexpansive-like mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2010), Art. ID 512751, 15.

[3] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **71** (2009), e1626–e1632.

[4] ———, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: Their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.

[5] ———, *Strong convergence theorems for a family of mappings of type (P) and applications*, Nonlinear analysis and optimization, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009, pp. 1–17.

[6] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucharest, 1976.

[7] I. Cioranescu, *Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems*, Mathematics and its Applications, vol. 62, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.

[8] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945 (electronic) (2003).

[9] Y. Kimura, K. Nakajo, and W. Takahashi, *Strongly convergent iterative schemes for a sequence of nonlinear mappings*, J. Nonlinear Convex Anal. **9** (2008), 407–416.

[10] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 356–363.

[11] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 166–177.

[12] S. Matsushita and W. Takahashi, *A proximal-type algorithm by the hybrid method for maximal monotone operators in a Banach space*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2007, pp. 355–365.

[13] ———, *The sequences by the hybrid method and existence of fixed points of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Fixed point theory and its applications, Yokohama Publishers, Yokohama, 2008, pp. 109–113.

[14] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372–379.

[15] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **81** (2003), 439–445.

[16] R. G. Otero and B. F. Svaiter, *A strongly convergent hybrid proximal method in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **289** (2004), 700–711.

[17] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), 877–898.

[18] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.

[19] H. Takahashi and W. Takahashi, *Existence theorems and strong convergence theorems by a hybrid method for equilibrium problems in Banach spaces*, Fixed Point theory and its Applications, Yokohama Publishers, Yokohama, 2008, pp. 163–174.

[20] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[21] ______, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

[22] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.